

Title	混合整数計画に対する弱双対定理 (最適化の数理とアルゴリズム)
Author(s)	田中, 嘉浩
Citation	数理解析研究所講究録 (2002), 1297: 59-69
Issue Date	2002-12
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/42653">http://hdl.handle.net/2433/42653</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 混合整数計画に対する弱双対定理\*

北海道大学大学院経済学研究科 田中 嘉浩 (Yoshihiro Tanaka)<sup>†</sup>

Graduate School of Economics and Business Administration,  
Hokkaido University

### 1 序

Balas の昨年の Rotterdam での EURO Gold Medal 講演 [1] に依れば、整数計画法は、大別すると変数を分割統治する branch-and-bound 法、真の解集合を含み各反復解を分離する切除平面を生成していく cutting plane 法、0-1 計画の disjunctive 法と関連の有る lift-and-project 法等に大別できる。

緩和法は上記の中では branch-and-bound 法の部分問題の下界値を求めるのにも利用できるが、より直接的にビューリスティック解法として、上記の厳密解法の直接適用が不可能な問題に対して精度の良い近似値としての下界値を求める実用的解法として意味の有るものであり、非線形計画や凸計画の関連からも興味深い。

ラグランジュ双対緩和は、Everett [3] に依って非線形計画からの類推として形式的に提案されたものであるが、Held and Karp [8] は対称巡回セールスマン問題 (TSP) に対するラグランジュ緩和が最小 1 木問題になることを示し、HK 下界と言われる誤差 1 % 以内の良質な下界を効率的に得ることに成功した。更に、Geoffrion [5] はラグランジュ双対解と元問題の関係に対して見通しの良い結果を与えている。

一方、代理 (surrogate) 双対緩和はラグランジュ双対緩和とほぼ時を同じくして Glover [6] に提案されたものであり、Greenberg and Pierskalla [7] に依って代理双対ギャップがラグランジュ双対ギャップ以下であることが確立されて以来、きつい下界を与える緩和法として主に実用的見地から注目されてきている。Karwan and Rardin [9] はギャップの関係の精緻化と条件に依って代理双対に切り替わる 2 フェイズアルゴリズムを提案した。

代理双対緩和の有効な応用例としては、Lorena and Lopes [13] が集合被覆問題

$$\begin{aligned}
 (SCP) \quad & \text{minimize} && c^T x \\
 & \text{subject to} && Ax \geq e, \\
 & && x \in \{0, 1\}^n,
 \end{aligned}$$

\*京都大学数理解析研究所講究録 (2002)

<sup>†</sup>E-mail: tanaka@econ.hokudai.ac.jp

但し、 $c$  は正ベクトル、 $A$  は  $m \times n$  の  $\{0, 1\}$  成分行列、 $e = (1, \dots, 1)^T$  が有り、代理双対緩和の有効性を示しているが、施設配置等実際にその問題に定式化される問題は多い。Galvão, Espejo, and Boffey [4] は最大被覆地点問題

$$\begin{aligned} (MCLP) \quad & \text{maximize} \quad f^T x \\ & \text{subject to} \quad y^T A - x \geq 0, \\ & \quad \quad \quad y^T e = p, \end{aligned}$$

但し、 $f_j$  は人口、 $x_j \in \{0, 1\}$ ,  $j \in J$  は被覆、 $y_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in I$  は施設稼働、 $e = (1, \dots, 1)^T$ ,  $p$  は施設稼働数、に於いても代理双対緩和が有効なことを示している。最近では、対称 TSP 問題等のグラフ・ネットワークの NP 完全に属する問題に対して、ラグランジュ双対緩和の初期の不安定さを代理双対緩和で補う Lagrangian/surrogate 法 [16][14] の実用的な有効性が示されつつある。

ところで Ram and Karwan [19] は混合整数計画に於ける代理双対ギャップを初めて示したが彼等は整数計画ではギャップは無いと思っていた。整数計画に於ける弱双対定理はまだ研究されるべきことは多く残っている。

本稿では整数計画で既に代理双対ギャップが存在することやその拡大として混合整数計画の代理双対ギャップを考えれることや、ラグランジュ双対緩和との関係を中心に、混合整数計画に於ける弱双対定理を導出することを主眼にする。

## 2 整数計画に対する結果

一般の整数線形計画問題は次の様に述べられる：

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{minimize} \quad c^T x \\ & \text{subject to} \quad Ax \geq b, \quad x \in S, \end{aligned}$$

但し  $A$  は  $m \times n$  有理数行列、 $b, c$  は適当な次元の有理数ベクトル、 $S = \{x \geq 0 \mid S \subset \mathbb{Z}_+^n, Gx \leq h \text{ かつ有界}\}$ , 但し  $G$  は  $k \times n$  有理数行列、 $h$  は  $k \times 1$  有理数ベクトル、とする。

(P) に関するラグランジュ緩和 (Lagrangian relaxation) は  $\lambda \geq 0$  に対して、

$$\begin{aligned} (P_\lambda) \quad & \text{minimize} \quad c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ & \text{subject to} \quad x \in S, \end{aligned}$$

と定義され、対応するラグランジュ双対 (Lagrangian dual) は、

$$(D_L) \quad \max_{\lambda \geq 0} \{v(P_\lambda)\}.$$

となる。

(P) に関する代理制約緩和 (surrogate constraint relaxation) は  $\mu \geq 0$  に対して、

$$(P^\mu) \quad \begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && \mu^T (b - Ax) \leq 0, \quad x \in S. \end{aligned}$$

と定義され、対応する代理双対 (surrogate dual) は、

$$(D_S) \quad \max_{\mu \geq 0} \{v(P^\mu)\}.$$

となる。

$v(D_S)$  を求めるアルゴリズムの一つを示す (cf. [18])。

#### アルゴリズム

*Step 0* :  $k \leftarrow 1, \alpha^0 \leftarrow -\infty$  とし、任意の  $\mu^1 \geq 0$  を選ぶ。

*Step 1* (代理緩和) : 代理緩和  $(P^{\mu^k})$  を解き、解  $x^k$  を得る。 $Ax^k \geq b$  ならば  $x^k$  は (P) の解となり、 $c^T x^k = v(D_S) = v(P)$  として停止。

*Step 2* (暫定解更新) :  $c^T x^k > \alpha^{k-1}$  ならば  $\alpha^k \leftarrow c^T x^k$ 。さもなければ、 $\alpha^k \leftarrow \alpha^{k-1}$  とする。

*Step 3* ( $\mu$  の更新) :  $x^k$  を集合  $X$  (今迄に生成された  $x^k$  全て)  $\subset T$  に付け加える。  
線形計画

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \epsilon \\ &\text{subject to} && \epsilon \leq \mu^T (b - Ax), \quad x \in X \\ &&& \mu \geq 0 \\ &&& e^T \mu \leq 1 \end{aligned}$$

の解を  $(\mu^{k+1}, \epsilon^{k+1})$  とする。 $\epsilon^{k+1} = 0$  ならば  $v(D_S) = \alpha^k$  で停止。さもなければ  $k \leftarrow k + 1$  と置いて Step 1 へ。

$$\begin{aligned}
v(P^\lambda) &\triangleq v \left( \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{sub. to} & \lambda^T(b - Ax) \leq 0, \ x \in S \end{array} \right) \\
&\geq v \left( \begin{array}{ll} \min & c^T x + \lambda^T(b - Ax) \\ \text{sub. to} & \lambda^T(b - Ax) \leq 0, \ x \in S \end{array} \right) \\
&\geq v \left( \begin{array}{ll} \min & c^T x + \lambda^T(b - Ax) \\ \text{sub. to} & x \in S \end{array} \right) \\
&\triangleq v(P_\lambda)
\end{aligned}$$

依って、

$$v(D_L) \triangleq \sup_{\lambda \geq 0} v(P_\lambda) \leq \sup_{\mu \geq 0} v(P^\mu) \triangleq v(D_S)$$

一般に、

$$v(D_L) \leq v(D_S) \leq v(P)$$

の関係が成立する (Greenberg and Pierskalla [7])。

例.

$$\begin{aligned}
(P) \quad &\text{maximize} \quad x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 9, \\
&\quad \quad \quad x_1 + 4x_2 \leq 8, \\
&\quad \quad \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 5, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+^2.
\end{aligned}$$

最適解:  $x^* = \{(0, 2)^T, (2, 1)^T\}$ ,  $v(P) = 4$ ,

代理双対解:  $x_S^* = \{(1, 2)^T, (3, 1)^T, (5, 0)^T\}$ ,  $v(P^\mu) = 5$ ,

ラグランジュ双対解:  $x_\lambda^* = \{S \text{ 内の整数点} \}$ ,  $v(P_\lambda) = 5$ .

Ram and Karwan [19] の推測とは異なり、この例の様に整数計画問題に於いてさえ双対ギャップがある。同様に純整数計画に対しては既に Parker and Rardin [18], Example 5.16 にも例が示されていた。

先に進む前に元問題 (P) の線形緩和 (linear relaxation) を、

$$(\bar{P}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, \quad x \in \bar{S}, \end{array}$$

但し、 $\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Gx \leq h \text{ かつ有界}\}$  で定義し、この解を  $\bar{x}$  とする。

**定理 1**  $\bar{x} \notin \text{bdry } \bar{S}$  を仮定する。問題 (P) と問題 ( $D_S$ ) の間に双対ギャップ、即ち、

$$v(D_S) < v(P) \quad (2.1)$$

となる必要十分条件は離散集合  $C = \{x \mid c^T \bar{x} \leq c^T x < c^T x^*, x \in S\} \neq \emptyset$ 、であることである。

[証明] 問題 ( $\bar{P}$ ) に Kuhn-Tucker 条件を適用する。

$$\begin{aligned} c - A^T \bar{\mu} &= 0, \\ \bar{\mu} &\geq 0, \quad A\bar{x} \geq b \quad \bar{\mu}^T(b - A\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

その時、

$$c^T \bar{x} = \bar{\mu}^T A\bar{x} = \bar{\mu}^T b,$$

が成立する。

問題 ( $D_S$ ) に対して  $\mu \neq k\bar{\mu}$ ,  $k > 0$  と  $x \in \{x \mid \mu^T(b - Ax) = 0\}$  を取ると、 $\mu^T A$  と  $\bar{\mu}^T A$  の間の為す角  $\gamma$  は  $0 < \gamma < \pi$  となるので、 $\bar{\mu}^T A$  と  $x - \bar{x}$  の間の為す角は  $\frac{\pi}{2} < (\frac{\pi}{2} + \gamma) < \pi$  と取れる。この時  $c^T = \bar{\mu}^T A$  だから、

$$\begin{aligned} c^T x - c^T \bar{x} &= \bar{\mu}^T A(x - \bar{x}) \\ &= \bar{\mu}^T A|x - \bar{x}| \cos(\frac{\pi}{2} + \gamma) < 0, \end{aligned}$$

となるがこれは  $\bar{x}$  の最適性を示している。

だから、問題 ( $D_S$ ) の解で  $\mu = \bar{\mu}$  を取ると、 $c^T = \bar{\mu}^T A$  となり、 $\bar{\mu}^T(b - Ax) = c^T \bar{x} - c^T x$  だから、問題 ( $D_S$ ) は次の問題によって決定される。

$$(P_S) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & c^T \bar{x} - c^T x \leq 0, \quad x \in S, \end{array}$$

$C \neq \phi$  ならば  $x$  は問題  $(D_S)$  で実行可能なので、 $c^T x < c^T x^*$  となる。

逆に、 $(D_S)$  の実行可能解が  $c^T x < c^T x^*$  を満たすならば、 $C \neq \phi$  が保証される。 ■

**注意 1**  $\bar{x} \in \text{bdry } \bar{S}$  の時には必要十分条件に制約が入り、離散集合  $D = \{x \mid c^T \bar{x} \leq c^T x < c^T x^*, \mu^T(b - Ax) \leq 0, \mu \geq 0, \mu \neq 0, x \in S\} \neq \phi$ 、であることであるが、本稿では詳細は省く。

次にラグランジュ双対解と元問題の解の目的関数値で成立する関係を示す。

**定理 2** 問題  $(P)$  と問題  $(D_L)$  の間に双対ギャップ、即ち、

$$v(D_L) < v(P) \quad (2.2)$$

となる必要十分条件は線形緩和解  $\bar{x}$  が整数解でない (即ち、整数性 (*integrality property*) が成立しない)、ことである。

[証明] Geoffrion [5] 又は Nemhauser and Wolsey [17] の、

$$v(D_L) = \min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \text{conv } S\} \quad (2.3)$$

から言えるが、洞察に役立つ別証明を記す。

問題  $(\bar{P})$  の解  $\bar{x} \notin \text{bdry } \bar{S}$  に対して、 $(\bar{P})$  に Kuhn-Tucker 条件を適用することにより、

$$c - A^T \bar{\lambda} = 0,$$

が必要となる。その時、 $\bar{\lambda}$  及び  $v(D_L) = v(P_{\bar{\lambda}}) = \bar{\lambda}^T b$  が  $x$  に無関係に決定される。

問題  $(P)$  の解  $x^* \notin \text{bdry } \bar{S}$  に対して、 $(b - Ax^*)_k < 0$  となる  $k$  が存在する。 $\lambda_k = 0$  ならば  $v(P_{\lambda}) = c^T x'_{\lambda}$ ,  $x^* = x'_{\lambda} \in \text{bdry } \bar{S}$ , となるがそれは矛盾である。それ故に  $\lambda_k > 0$  と

$$v(P) = c^T x^* > c^T x^* + \lambda^T (b - Ax^*) = v(D_L),$$

を得る。

証明の残りの部分は  $\text{bdry } \bar{S}$  の解に対する考察である。ベクトル場

$$\{c - A^T \lambda(x_{\lambda}^*) \mid x_{\lambda}^* \in \text{bdry } \bar{S} \text{ is a solution of } (P_{\lambda})\}$$

は [21] の Theorem 6.12 から連続で  $-\xi, \xi \in N_{\bar{S}}(x_{\lambda}^*)$  に等しく、 $x_{\lambda}^*$  で内側方向である。  
結局  $\lambda(x_{\lambda}^*)$  は  $(D_L)$  の解でない。 ■

次にラグランジュ双対解と代理双対解の目的関数値で成立する関係を導出する。

**定理 3**  $\bar{x} \notin \text{bdry } \bar{S}$  を仮定する。問題  $(D_S)$  と問題  $(D_L)$  の間に双対ギャップ、即ち、

$$v(D_L) < v(D_S) \quad (2.4)$$

となる必要十分条件は超平面  $H = \{x \mid cx = c\bar{x}\}$  が  $S$  の点を含まないことである。

[証明]  $v(D_L)$  は (2.3) から、線形緩和解  $\bar{x}$  での目的関数値に等しく、 $v(D_L) = c^T \bar{x}$  となる。定理 1 の証明と同様に、 $v(D_S)$  は  $\mu = \bar{\mu}$  と取ると、 $c^T = \bar{\mu}^T A$  となり、問題  $(D_S)$  は問題  $(P_S)$  で決定される。従って題意が成立する。 ■

### 3 混合整数計画に対する結果

一般の混合整数線形計画問題は次の様に述べられる：

$$\begin{aligned} (P^M) \quad & \text{minimize} \quad c^T x \\ & \text{subject to} \quad Ax \geq b, \quad x \in T, \end{aligned}$$

上の問題の領域制約  $T$  は、

$$\begin{aligned} T = \{ & x \geq 0 \mid x_i \in \mathbb{Z}_+, i \in I_Z, \quad x_j \in \mathbb{R}_+, j \in I_R; \\ & I_Z \text{ と } I_R \text{ は所与, } Gx \leq h \text{ かつ } T \text{ は有界} \}. \end{aligned}$$

但し、 $I_Z \cup I_R = \{1, \dots, n\}$ 、と定義する。

$(P^M)$  に関するラグランジュ緩和 (Lagrangian relaxation) は  $\lambda \geq 0$  に対して、

$$\begin{aligned} (P_{\lambda}^M) \quad & \text{minimize} \quad c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ & \text{subject to} \quad x \in T, \end{aligned}$$

と定義され、対応するラグランジュ双対 (Lagrangian dual) は、

$$(D_L^M) \quad \max_{\lambda \geq 0} \{v(P_{\lambda}^M)\}.$$



$(P^M)$  に関する代理制約緩和 (surrogate constraint relaxation) は  $\mu \geq 0$  に対して、

$$(P^{M\mu}) \quad \begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && \mu^T (b - Ax) \leq 0, \quad x \in T, \end{aligned}$$

と定義され、対応する代理双対 (surrogate dual) は、

$$(D_S^M) \quad \max_{\mu \geq 0} \{v(P^{M\mu})\},$$

先に進む前に元問題  $(P^M)$  の線形緩和 (linear relaxation) を、

$$(\bar{P}^M) \quad \begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b, \quad x \in \bar{T}, \end{aligned}$$

但し、 $\bar{T} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Gx \leq h \text{ かつ有界}\}$

この解を  $\bar{x}$  とする。

**補題 1** ノルム空間  $X$  に於いて、凸集合  $K$  の非空の内部を含まずに線形多様体  $V$  を含む閉超平面  $H$  が存在しない必要十分条件は  $V$  が  $K$  の非空の内部を含むことである。

[証明] Hahn-Banach の幾何型定理の対偶から言える。 ■

**定理 4**  $\bar{x} \notin \text{bdry } \bar{T}$  を仮定する。 $c_k \neq 0$  となる  $k \in I_R$  が存在すると仮定する。その時、問題  $(P^M)$  と 問題  $(D_S^M)$  の間に双対ギャップが存在する、即ち、

$$v(D_S^M) < v(P^M) \tag{3.1}$$

となる必要十分条件は  $\bar{x} \notin T$  となることである。 $c_k = 0, \forall k \in I_R$  ならば、集合  $C_M = \{x \mid c^T \bar{x} \leq c^T x < c^T x_M^*, x \in T\} \neq \emptyset$  の時に上の不等式が成立する。

[証明] 解  $x_S^{M*}$  に於いて、 $\mu = \bar{\mu}$ 、 $c^T = \bar{\mu}^T A$  が成立するので、定理 1 の証明と同様に問題  $(D_S^M)$  は次の問題

$$(P_S^M) \quad \begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && c^T \bar{x} - c^T x \leq 0, \\ &&& x \in T, \end{aligned}$$

で定義される。

$c_k \neq 0, k \in I_R$  の場合は、 $\bar{x} \notin T$  ならば補題 1 から超平面  $H = \{x \mid c^T x = c^T \bar{x}\}$  と交わる線形多様体  $V = \{x \mid x_k = \bar{x}_k, x_l = \bar{x}_l^*, k \neq l\}$  上で  $c^T x_S^{M*} = c^T \bar{x}$  を満足するか、bdry  $\bar{T}$  と交わる  $V$  上で  $c^T \bar{x} \leq c^T x_S^{M*} \leq c^T \tilde{x}^M < c^T x_M^*$  を満足する  $\tilde{x}^M \in T$  が存在する。

$c_k = 0, \forall k \in I_R$  の場合は、定理は定理 1 に帰着される。 ■

**定理 5** 問題  $(P^M)$  と問題  $(D_L^M)$  の間に双対ギャップ、即ち、

$$v(D_L^M) < v(P^M) \quad (3.2)$$

が存在する必要十分条件は線形緩和解が  $\bar{x} \notin T$  となることである。

[証 明] 先ず、コンパクト集合  $T$  上での線形関数の最小化だから、

$$v(P_\lambda^M) = v \left( \begin{array}{ll} \min & c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ \text{sub. to} & x \in \text{conv } T \end{array} \right)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} v(D_L^M) &= v \left( \begin{array}{ll} \min & c^T x + \bar{\lambda}^T (b - Ax) \\ \text{sub. to} & x \in \text{conv } T \end{array} \right) \\ &= v \left( \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{sub. to} & Ax \geq b, x \in \text{conv } T \end{array} \right) \end{aligned}$$

となるから題意が成り立つ。 ■

定理 2 等と関連するが、一般に  $(P)$  の制約条件  $\{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$  で  $A, b$  が整数の時に任意の  $b$  に対して端点が整数となる為の必要十分条件は  $A$  が完全ユニモジュラ行列 (totally unimodular matrix) であることが分っている。

**完全ユニモジュラ行列 (totally unimodular matrix) :**  $A$  の全ての小行列式が  $\pm 1$  か  $0$  である。

$b$  が任意でなく制限的な時にはより緩い条件で良い。 $A, b, c$  が有理数の時に、

**完全双対整数性** (totally dual integer) : 制約  $\{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$  で双対問題 (D) が任意の整数  $c$  に対して最適解  $y$  が整数である。

という条件が考えられているが、更に  $A, b$  が整数ならば端点が整数になる良い性質を持ち、マッチング問題等との関連が考えられている。

他に最近、M. Conforti, G. Cornuéjols, and M.R. Rao (1999) は、

**バランス行列** (balanced matrix) :  $0, 1$  行列が行にも列にも 2 つの 1 を含む奇数次の正方小行列を含まない時にバランスされる (balanced) という。

を考え、それを係数行列  $A$  にする線形計画では整数解を持つことから、パッキング問題、被覆問題との関連が考えられている。

## 4 纏め

整数計画及び混合整数計画に対する弱双対定理として次の関係が成立する。

- 整数計画に於いて既に代理双対ギャップが存在する例が存在する。
- 整数計画、混合整数計画共にラグランジュ双対ギャップが有るかどうかを決定する問題はクラス P に属する。
- 整数計画の代理双対ギャップを調べる問題は NP 完全に属するが、混合整数計画の場合は  $\exists c_k \neq 0, k \in I_R$  の時にはクラス P に属する。

## 参考文献

- [1] Balas, E. (2002): "Some thoughts on the development of integer programming during my research career – lecture delivered upon receiving the EURO Gold Medal July 9, 2001, Rotterdam," *European Journal of Operational Research*, 141, 1–7.
- [2] Conforti, M., Cornuéjols, G., and Rao, M.R. (1999): "Decomposition of Balanced Matrices," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 77, 292–406.
- [3] Everett III, H. (1963): "Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources," *Operations Research* 11, 399–417.

- [4] Galvão, R.D., Espejo, L.G.A., and Boffey, B. (2000): "A comparison of Lagrangian and surrogate relaxations for the maximal covering location problem," *European Journal of Operational Research* **124**, 377–389.
- [5] Geoffrion, A.M. (1974): "Lagrangian relaxation for integer programming," *Mathematical Programming Study* **2**, 82–114.
- [6] Glover, F. (1965): "A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem," *Operations Research* **13**, 879–919.
- [7] Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P. (1970): "Surrogate mathematical programming," *Operations Research* **18**, 924–939.
- [8] Held, M and Karp, R.M. (1970): "The traveling-salesman problem and minimum spanning trees," *Operations Research* **18**, 1138–1162.
- [9] Karwan, M.H. and Rardin, R.L. (1979): "Some relationships between lagrangian and surrogate duality in integer programming," *Mathematical Programming* **17**, 320–334.
- [10] Khachian, L.G. (1979): "A polynomial algorithm for linear programming," *Doklady Akad. Nauk USSR*, **244**, 1093–1096.
- [11] Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. (1951): "Nonlinear programming," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Univ. California Press, Berkeley.
- [12] Lemaréchal, C. and Renaud, A. (2001): "A geometric study of duality gaps, with applications," *Mathematical Programming* **90**, 399–427.
- [13] Lorena, L.A.N. and Lopes, F.B. (1994): "A surrogate heuristic for set covering problems," *European Journal of Operational Research* **79**, 138–150.
- [14] Lorena, L.A.N. and Narciso, M.G. (2002): "Using logical surrogate information in Lagrangean relaxation: An application to symmetric traveling salesman problems," *European Journal of Operational Research* **138**, 473–483.
- [15] Luenburger, D.G. (1969): *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, New York.
- [16] Narciso, M.G. and Lorena, L.A.N. (1999): "Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problem," *European Journal of Operational Research* **114**, 165–177.
- [17] Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A. (1988): *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York.
- [18] Parker, R.G. and Rardin, R.L. (1988): *Discrete Optimization*, Academic, San Diego.
- [19] Ram, B. and Karwan, M.H. (1989): "A result in surrogate duality for certain integer programming problems," *Math. Program.* **43**, 103–106.
- [20] Rockafellar, R.T. (1970): *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [21] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J-B. (1998): *Variational Analysis*, Springer, Berlin.
- [22] Tanaka, Y. (2002): "On the existence of duality gaps for mixed integer programming," manuscript.